

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТОРГОВЫХ СТРАТЕГИЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ НА ФОНДОВОМ РЫНКЕ

*В работе предлагается новый подход к решению задачи управления активами на финансовых рынках – торговые стратегии, основанные на механических торговых системах (МТС). Рассматриваются основные принципы построения торговых систем и оценка их эффективности. Приводятся примеры торговых систем на основе методов технического и статистического анализа, и дается оценка эффективности данных систем на российском фондовом рынке.*

### **Введение**

Возможность получения прибыли от торговых операций на финансовых рынках интересовала теоретиков и практиков с момента появления первых бирж. Целью исследования является создание стратегии совершения сделок, результат которых прогнозируем по критериям доходности и рискованности.

Построение любых торговых стратегий основывается на некоторой модели поведения цен финансовых инструментов. Арбитражные возможности (или прибыльность стратегии) возникают из способности модели в той или иной форме прогнозировать рынок финансового инструмента. Первые попытки описать движение цены на инструмент были сделаны Л. Башелье в работе 1900 года, предполагавшей, что изменения цен являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами. Дальнейшие работы Г. Марковица [1] и У. Шарпа [3] были посвящены составлению портфеля акций

и сравнение его с рыночным портфелем соответственно. Позднее работы Блэка и Шоулза [2] исследовали вопрос ценообразования опционов. На сегодняшний день практически отсутствуют теоретические исследования краткосрочных операций (спекуляций) и их результатов в долгосрочной перспективе, несмотря на их широкое распространение среди участников торгов. Между тем, краткосрочные операции, совершаемые по торговой стратегии, можно рассматривать как один из видов управления активами на финансовом рынке.

Уточним, что здесь мы не рассматриваем арбитраж как процесс получения прибыли без риска, когда совершаются противоположные сделки на взаимосвязанных рынках. Под арбитражными возможностями понимаются события, появление которых позволяет прогнозировать рынок инструмента с точностью, достаточной для получения положительной прибыли при длительной игре.

В следующем пункте будет дано определение основных понятий, используемых в статье. Затем рассмотрим построение торговых систем на основе методов технического анализа и новый способ задания параметров индикаторов, позволяющий повысить эффективность систем. Далее, используя отклонения в реальных данных от гипотезы эффективного рынка, выделим ряд

арбитражных свойств рынков. На основе данных свойств будут предложены торговые стратегии и описаны результаты их работы на исторических данных акций РАО «ЕЭС России».

### **Основные определения**

Пусть  $c_t$  – значение цены на инструмент в момент времени  $t, t = 0..T$ . Обозначим  $\mathbf{c}_t = (c_0, c_1, \dots, c_t)$  – вектор прошлых цен до момента времени  $t$ . Пусть  $d_t = \frac{c_t}{c_{t-1}} - 1$  – изменение цены в момент времени  $t$ , которое также называют доходностью инструмента. Наряду с  $d_t$  также будем использовать величины  $h_t = \ln \frac{c_t}{c_{t-1}}$  – логарифмическую доходность инструмента. Так как при малых изменениях цены  $c_t$  величины  $h_t$  и  $d_t$  эквивалентны, то иногда бывает удобнее использовать логарифмическую доходность вместо обычной доходности актива.

Далее формализуем понятие торговой стратегии. Для этого обозначим  $K_t$  – капитал игрока в момент времени  $t$ . Изменение капитала за один шаг может происходить только за счет изменения стоимости рыночной позиции, то есть

$$K_{t+1} = K_t + S_t (c_{t+1} - c_t), \text{ где} \quad (1)$$

$S_t = r_t \frac{K_t}{c_t}$  – количество инструментов, купленных в длинную позицию или проданных без покрытия в короткую позицию. Величина  $r_t \in [-1, 1]$  определяет направление операции, а также долю капитала, задействованного в сделке.

**Определение.** *Торговой стратегией (ТС) будем называть последовательность функций*

$$r_t = r_t(\mathbf{c}_t) \in [-1, 1],$$

*отображающих историю прошлых цен во множество решений.*

Если в качестве области решений рассматривается множество из трех значений  $\{-1, 0, 1\}$ , то говорят о *механической торговой системе (МТС)*. На практике построение ТС сводится к созданию механической торговой системе и метода управления капиталом. МТС определяет направление операции, а метод управления капиталом определяет, какую долю счета задействовать в следующей сделке.

**Пример.** При долгосрочном инвестировании используется стратегия «купил и держи» (buy and hold). В этом случае  $r_t \equiv 1$  для любого  $t$ , поэтому все показатели стратегии, такие как прибыль, риск и другие, полностью совпадают с аналогичными показателями для  $d_t$ .

**Замечание.** В данной формулировке определения торговой стратегии в качестве входной информации для принятия решений используются только значения прошлых цен  $c_t$ . В общем случае, область определения функций  $r_t$  можно дополнить другими событиями.

В терминах доходности изменение капитала за один шаг (1) можно переписать в виде

$$\Delta K_{t+1} = \frac{K_{t+1} - K_t}{K_t} = r_t(c_t) d_{t+1}. \quad (2)$$

Если величина  $d_{t+1}$  есть некоторая функция от прошлых цен  $c_t$ , то задача построения прибыльной ТС решается тривиально. Однако изменение цен на рынке носит случайный характер, то есть  $d_{t+1}$  являются случайными величинами. Поэтому при создании ТС приходится использовать вероятностные закономерности в поведении цен, чтобы на основании  $c_t$  сделать прогноз будущего изменения цены  $d_{t+1}$ . Вероятностные закономерности могут заключаться как в виде и параметрах распределения  $d_{t+1}$ , так и в структуре зависимости прошлых и будущих цен. Необходимым условием прибыльности торговой системы является наличие положительного математического ожидания прибыли в сделке  $\Delta K_{t+1}$  на достаточно длинном промежутке времени.

Критерии оценки итоговой эффективности торговой системы могут быть следующие:

- итоговая прибыль;
- максимальная просадка счета (draw dawn);
- доля прибыльных сделок;
- соотношение средней прибыльной сделки и средней убыточной сделки.

Первые два критерия наиболее часто используются для оценки доходности и риска системы, хотя имеют ряд недостатков. Например, итоговая прибыль напрямую зависит от количества сделок, поэтому при оптимизации по этому критерию получается система с большим количеством низко прибыльных сделок, которые могут даже не покрывать издержки на совершение операций. Максимальная просадка счета – это единичное событие (последовательность конкретных сделок) на исследуемом промежутке времени, которое, в принципе, в будущем может больше и не повториться.

### **Торговые системы на основе методов технического анализа**

Приведем пример МТС, основанной на техническом индикаторе. В качестве индикатора возьмем известный осциллятор  $RSI$ , который будет основой для базового сигнала на вход и закрытие позиции. Обозначим интервал значений  $RSI$   $(0, a)$  - зоной перепроданности (oversold), а интервал  $(b, 100)$  -

зоной перекупленности (overbought),  $0 < a < b < 100$  - параметры системы. Сигнал на покупку поступает, когда  $RSI_t(n)$  покидает зону перепроданности. Соответственно, сигнал на продажу – когда  $RSI_t(n)$  покидает зону перекупленности,  $n$  - параметр системы. Для ограничения убытков по сделке добавим также сигнал stop loss: будем закрывать убыточную позицию, если изменение цены превысило  $sl$  процентов от цены входа. Итак, мы получили торговую систему с четырьмя параметрами:  $a, b, n, sl$ .

Данная система была протестирована на часовых данных котировок российских акций. Период тестирования – с августа 2003 года по август 2006 года. Параметры системы были оптимизированы и равнялись  $a = 30, b = 70, n = 5, sl = 5\%$ . Результаты работы МТС приведены в таблице 1 в графе «начальная система», исходя из стартового капитала в 100 000 рублей. Полученная прибыль не реинвестировалась, то есть сумма очередной сделки всегда равнялась стартовому капиталу.

Эффективность торговой системы мы оценивали по двум критериям: доходность и риск. Доходность была пересчитана в годовой доходности. Учитывая, что тестирование проводилось на одном историческом периоде, показатель годовой доходности эквивалентен показателю итоговой прибыли, но он является более информативным. Риск торговой системы отражала максимальная просадка счета, пересчитанная в процентах к торговому капиталу. Начальная система показала доходность в диапазоне от 14.65% («Сбербанк») до 33.83% («Газпром») годовых в зависимости от инструмента. Просадка счета изменялась от 21.10% («РАО ЕЭС») до 34.74% («Татнефть»). По соотношению доходность/риск лучшие результаты у акций «РАО ЕЭС», а худшие – у бумаг «Сбербанка» и «Татнефти».

**Таблица 1**

**Результаты работы начальной и модифицированной МТС на часовых данных при стартовой сумме в 100 000 рублей**

Эмитент	Начальная система			Модифицированная система		
	Годовая доходность, %	М акс. просадка счета, %	П прибыль, руб.	Годовая доходность, %	М акс. просадка счета, %	П прибыль, руб.
"РАО ЕЭС"	28.70	2 1.10	1 08 820	29.41	1 4.34	1 12 176
"Газпром"	33.83	2 5.59	1 34 758	35.14	2 0.70	1 36 811
"ЛУКОЙЛ"	21.72	2 9.53	7 7 633	20.32	1 4.94	7 0 857
"Татнефть"	17.42	3 4.74	5 9 147	31.39	1 8.74	1 19 645
"Сбербанк"	14.65	2 9.66	4 8 912	21.88	2 0.68	7 6 683
ГМК "Норильский никель"	15.50	2 7.13	5 2 496	33.45	4 0.02	1 31 650

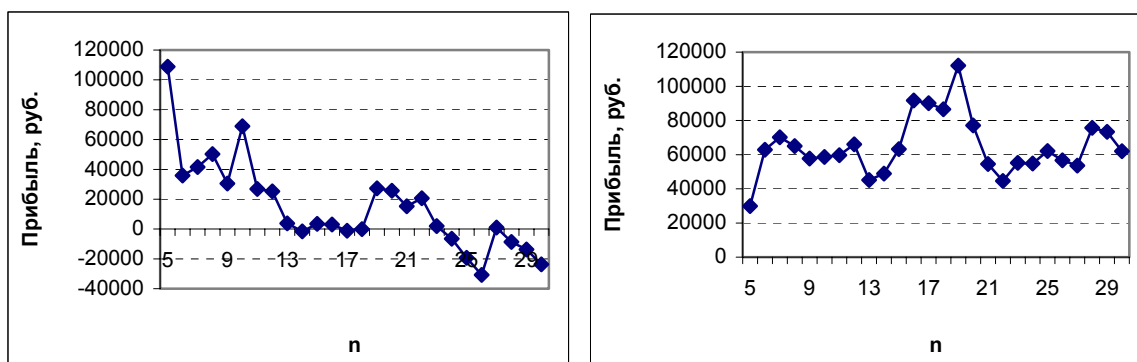
Полученные результаты довольно скромные. Также настораживает высокий риск системы. Разумная просадка счета не должна превышать 10-15%, иначе на практике этой системе будет трудно следовать.

Непосредственный анализ сделок показал, что во время восходящей тенденции величина  $b = 70$  является заниженной, так как область значений индикатора  $RSI$  смещается вверх. В то же время, при падающем тренде величина  $a = 30$  является завышенной. В обоих случаях мы получаем запаздывание сигнала на покупку/продажу акции. Отметим, что данная ситуация типична для большинства распространенных индикаторов – конкретные значения параметров работают на одном временном участке, но перестают работать на другом, так как поведение цен и характеристики рынка изменяются во времени. Следовательно, необходим механизм, подстраивающий параметры системы под новые условия на рынке. Опишем один из способов задания такого механизма для индикатора  $RSI$ .

В каждый момент времени  $t$  построим выборочное распределение  $F_t$  значений индикатора  $RSI$  для последних  $m$  точек. После этого, вычислим  $p_\alpha$ -персентиль порядка  $\alpha \in (0,1)$  для  $F_t$ , то есть значение индикатора  $RSI$ , при котором в интервал  $(0, p_\alpha)$  значения индикатора попадают с вероятностью  $\alpha$ . Также вычислим персентиль  $p_{1-\alpha}$  порядка  $1-\alpha$ . Полученные персентили будем использовать в качестве динамических уровней перекопленности ( $p_{1-\alpha}$ ) и перепроданности ( $p_\alpha$ ). Динамичность данных показателей и соответствующая подстройка системы будет происходить за счет изменения выборочного распределения  $F_t$ . В модифицированной системе параметры  $a, b$  заменились новыми двумя параметрами –  $m, \alpha$ . Значение  $\alpha$  имеет смысл частоты сделок, чем больше его величина, тем чаще происходят сделки.

Результаты работы модифицированной системы приведены в таблице 1. Параметры системы были оптимизированы и равнялись  $n = 19, sl = 1\%, \alpha = 0.1, m = 50$ . Применение новой методики задания параметров позволило во всех случаях, кроме акций «ЛУКОЙЛа», увеличить прибыльность системы. Кроме этого, значительно сократился риск торговой системы. Интересные результаты показали акции ГМК «Норильский никель» - доходность системы выросла более чем в 2 раза, но при этом увеличилась и просадка системы до 40%.

Применение новых параметров позволило сделать МТС более устойчивой к изменениям во входных данных. Проиллюстрируем это на примере акций «РАО ЕЭС» и параметра  $n$  - ширины окна для расчета индекса  $RSI$ .



**Рис. 1. Зависимость итоговой прибыли от параметра  $n$ . Слева начальная система, справа модифицированная**

В начальной системе изменение входного параметра  $n$  приводило к резкому ухудшению результатов системы, а при некоторых значениях система становилась даже убыточной. Измененная система стала более устойчивой к изменению этого параметра за счет внутренней подстройки (адаптации) к изменению во входных данных.

### ***Гипотеза эффективного рынка и арбитражные свойства рынков***

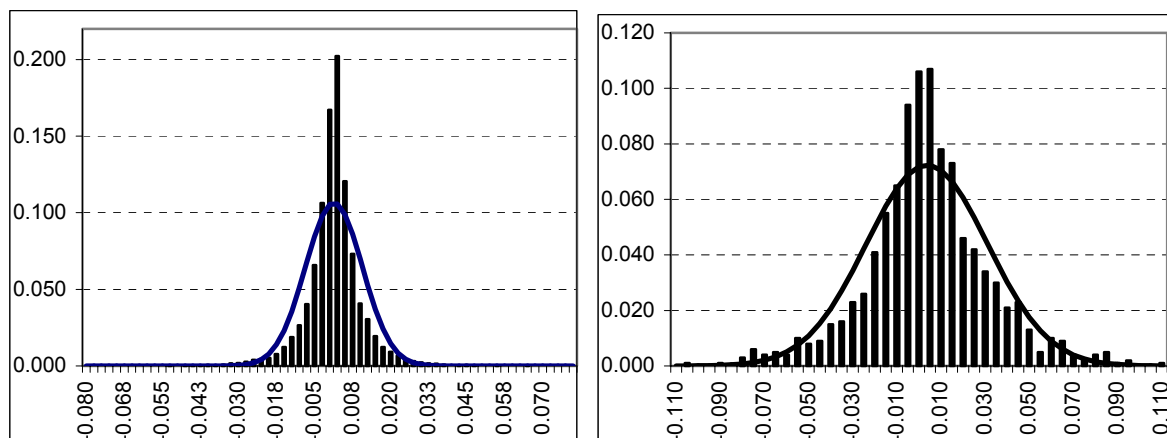
В современном финансовом мире широкое распространение получила гипотеза эффективного рынка (ЕМН) [6, с. 47]. Основные положения ЕМН заключаются в следующем:

- вся публичная информация уже учтена в ценах;
- $h_t$  являются независимыми, поскольку сегодняшнее изменение цены зависит только от выхода новой информации;
- $h_t$  имеют одинаковое распределение вероятностей, в частном случае нормальное.

На эффективном рынке поведение цен представляет собой случайное блуждание, то есть  $d_t$  и  $h_t$  являются последовательностями независимых случайных величин. В этом случае, если гипотеза эффективного рынка верна, то построение торговых стратегий бессмысленно, так как принятие решения равносильно подбрасыванию монетки. Если на эффективном рынке возможность арбитража отсутствует, тогда отклонения от ЕМН, наблюдаемые для реальных рынков, можно использовать для создания торговых стратегий. Далее рассмотрим некоторые вероятностные свойства реальных рынков, позволяющие строить прибыльные стратегии.

Для начала проанализируем вероятностное распределение изменений логарифмов цен  $h_t$ . Распределение данных величин давно изучено и описано в финансовой литературе. Вид распределения практически совпадает с нормальным распределением. Исключение составляет скопление значений в области среднего значения (положительный эксцесс распределения) и наличие

экстремальных значений, превышающих четыре стандартных отклонения, то есть распределение имеет «толстые хвосты».



**Рис. 2. Распределение частот  $h_t$  для часовых данных (слева) и для дневных данных (справа) на примере акций РАО «ЕЭС России» за 2003 – 2005 годы. Шаг дискретизации равен 0.005.**

Данные особенности хорошо видны на рис. 1, где приведена частота попадания величин  $h_t$  в интервалы длины 0.005 для самой ликвидной акции на российском рынке РАО «ЕЭС России». Положительный эксцесс и наличие экстремальных изменений характерно как для дневных изменений цен (правый рисунок), так и для часовых данных (левый рисунок).

**Таблица 2 Числовые характеристики выборки  $h_t$  при различных объемах выборки  $T$  и разрешении данных (час, день)**

	Час, $T = 1\ 000$	Час, $T = 10\ 000$	День, $T = 1\ 000$	День, $T = 2\ 000$
Среднее	0.000142	0.000132	0.00112	0.00083
Отклонение	0.004558	0.00933	0.02752	0.04181
Максимум	0.028227	0.087881	0.10984	0.26773
Минимум	-0.02954	-0.130547	-0.10656	-0.25131
Асимметрия	-0.167778	-0.420823	0.02112	0.22506
Эксцесс	7.59288	11.708	1.38878	5.40339

Статистический анализ  $h_t$  показывает наличие положительных средних значений (таблица 2), что объясняется долгосрочным восходящим трендом на рынке. Выборки для данных с часовым разрешением имеют отрицательную асимметрию, в то время как асимметрия дневных данных уже больше нуля. Отрицательная асимметрия часовых данных говорит о том, что внутри дня преобладают изменения меньше среднего, когда котировки после больших положительных изменений медленно сползают вниз. Для всех выборок эксцесс оказался больше нуля.

Наличие ненулевого математического ожидания, в общем случае, не противоречит ЕМН и свидетельствует о направленном движении на рынке или тренде. Непосредственное сравнение выборочного среднего  $\bar{h}$  изменений  $h_t$  с

заданным числом  $a_0$  приводит к тому, что покупка инструмента происходит слишком поздно, когда цена уже выросла. С помощью статистических гипотез [7] можно значительно сократить запаздывание сигнала.

Допустим, что  $h_t$  описываются нормальным законом распределения  $N(a, \sigma)$  и известна дисперсия  $Dh_t = \sigma^2$ . Тогда рассмотрим нулевую гипотезу  $H_0 = \{a = a_0\}$  и альтернативную гипотезу  $H_1 = \{a > a_0\}$ . При уровне значимости  $\alpha$  гипотеза  $H_0$  отвергается и происходит покупка инструмента, если  $\bar{h} > a_0 + t_{1-2\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ , где  $t_{1-2\alpha}$  – соответствующий квантиль нормального

распределения. Если гипотеза  $H_0$  принимается, тогда при условии открытой длинной позиции инструмент продается. Данная стратегия была протестирована на исторических дневных данных акций РАО «ЕЭС России». Уровень значимости равнялся  $\alpha = 0.1$ . В качестве нулевой гипотезы использовали равенство математического ожидания нулю  $a_0 = 0$ . Полученные результаты отображены в таблице 2. При заданных параметрах мы получили прибыльную стратегию с ожидаемым доходом 17.8% годовых.

Возвращаясь к особенностям распределения  $h_t$ , отметим наличие в выборке значений, превышающих 3-4 стандартных отклонения. Согласно нормальному закону  $P(h_t \in (a - 3\sigma, a + 3\sigma)) = 0.9973$ . Следовательно, при объеме выборки  $T = 2000$  количество значений, превышающих 3 стандартных отклонения, равняется 5.4. В действительности, мы получили 29 таких значений. Чрезмерное изменение цен, как правило, является следствием выхода новой информации. Как показывает практика, с таких изменений очень часто начинается новая тенденция на рынке. Поэтому построим торговую стратегию, использующую «тяжелые хвосты» распределения.

В основу торговой стратегии положим предположение, что направление резкого скачка цен совпадает с направлением будущего движения цен. Будем покупать инструмент, если

$$\frac{h_t - a}{\sigma} > k, \text{ где}$$

$k$  – это параметр стратегии. Значение  $k$  определяет величину изменения цены в единицах стандартных отклонений, на которое стратегия реагирует сменой позиции. Если

$$\frac{h_t - a}{\sigma} < -k,$$

**Таблица 3**

**Результаты тестирования стратегии на отличие матожидания от нуля на дневных данных «РАО ЕЭС России»**

Ожидание на сделку	4.60%
Ожидание за год	17.80%
Кол-во дней	2800
Кол-во сделок	55
Уровень значимости	0.1



то при условии открытой длинной позиции инструмент продается. Данная стратегия имеет наглядную интерпретацию. Пока изменения цен  $h_t$  находятся в канале шириной  $2k\sigma$ , рыночная позиция сохраняется. При выходе за пределы канала происходит сделка.

Результаты тестирования на дневных исторических данных РАО «ЕЭС России» с параметром  $k=1.8$  представлены в таблице 3. Заметим, что в интервал  $(a-1.8\sigma, a+1.8\sigma)$  попадает 92.8% всех изменений цены, исходя из нормального закона. Оставшиеся 7.2% изменений служат сигналом для смены позиции. Построенная торговая стратегия имеет положительное математическое ожидание прибыли в размере 3% на сделку и 20% на год.

В основу приведенной стратегии положены резкие скачки цен и их особое положение во временном ряде. Прибыльность стратегии говорит о том, что резкие изменения расположены во временном ряде не случайным образом, а предшествуют началу нового тренда. Для проверки этого предположения мы сгенерировали методом Монте-Карло 3 случайных ценовых последовательности со средним значением  $a = 0.112\%$  и стандартным отклонением  $\sigma = 2.752\%$ , то есть с параметрами распределения от реальной последовательности. При формировании последовательностей подразумевалось, что изменения цен являются независимыми величинами и распределены по нормальному закону. Затем на трех полученных последовательностях была протестирована торговая стратегия, использующая «толстые хвосты», с аналогичными параметрами.

**Таблица 4**

**Результаты тестирования стратегии, использующей «тяжелые хвосты», на дневных данных «РАО ЕЭС России»**

Ожидание на сделку	3.00%
Ожидание за год	20.00%
Кол-во дней	2800
Кол-во сделок	115

**Таблица 5**

**Результаты тестирования стратегии, использующей "тяжелые хвосты" для реальной последовательности цен акции РАО "ЕЭС России" и усредненные результаты стратегии для трех случайных последовательностей**

	Ожидание на сделку	Ожидание на год	Вероятность выигрыша	Количество сделок
Случайные последовательности	0.30%	0.39%	44%	105
РАО "ЕЭС России"	3.00%	20%	40%	115

Полученные результаты (таблица 4) показали, что стратегия на случайных последовательностях перестала быть прибыльной. Ожидание прибыли за год упало практически до нулевого уровня 0.39% против 20% для

реальной последовательности. При этом вероятность выигрыша и количество сделок почти не изменилось. Главное изменение произошло в среднем размере сделки – ожидание на сделку снизилось в 10 раз. Этот факт свидетельствует о том, реальные данные обладают арбитражным свойством, когда за резким скачком цен следует продолжение тенденции в этом же направлении. В то же время, случайные последовательности этим свойством не обладают в силу независимости ее членов.

### **Заключение**

В работе формализовано понятие торговой стратегии и описан общий подход к созданию механических торговых систем. На примере индикатора *RSI* предложен новый способ задания параметров через перцентили выборочных распределений, обеспечивающий адаптацию индикатора под изменения в поведении цен. Данная модификация позволила значительно улучшить эффективность торговой системы на основе индикатора *RSI*.

Отправляясь от гипотезы эффективного рынка как рынка без арбитражных возможностей, нами было выделено ряд особенностей вероятностного распределения изменения цен  $h_t$ , которые были использованы для построения торговых стратегий. Исследование распределений  $h_t$  для акции РАО «ЕЭС России» показали наличие положительного математического ожидания, положительный эксцесс и экстремальные выбросы более трех стандартных отклонений. Использование предположения о нормальном распределении  $h_t$  и проверки статистических гипотез позволили построить прибыльную торговую стратегию. «Голстые хвосты» распределения были использованы в стратегии, действующей на пробой канала волатильности. Эксперимент со случайными последовательностями показал, что арбитражное свойство резких скачков цен присуще только реальным данным и не работает для случайной последовательности.

Предложенная модель торговых стратегий позволяет исследовать эффективность краткосрочных решений в долгосрочной перспективе. Кроме этого, торговые стратегии открывают новый подход к исследованию свойств самого рынка инструмента.

### **Библиографический список**

- 1 Markowitz H. Portfolio selection // Journal of Finance. 1952. V.7 (March). P. 77-91.
- 2 Black F., Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities // Journal of Political Economy. 1973. V. 81. №3 P. 637-659.
- 3 Шарп У., Александер Г., Бейли Дж. ИНВЕСТИЦИИ: Пер. с англ. – М.: ИНФРА-М, 1997. – XII, 1024 с.

- 4 Пастухов С.В. О некоторых вероятностно-статистических методах в техническом анализе. – Теория вероятн. и ее примен., 2004, т. 49, в. 2, с. 297 – 316.
- 5 Петерс Э. Фрактальный анализ финансовых рынков: Применение теории хаоса в инвестициях и экономике. М.: Интернет-трейдинг, 2004 – 304 с.
- 6 Ширяев А.Н. основы стохастической финансовой математики. Т. 1. Факты. Модели. М.: ФАЗИС, 1998. 512 с.
- 7 Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для вузов. –2-е изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004. – 573 с.
- 8 Кац Д.О., МакКормик Д.Л. Энциклопедия торговых стратегий /Пер. с англ. – М.: Альпина Паблишер, 2002. – 400 с.
- 9 Швагер Джек. Технический анализ. Полный курс. – М.: Альпина Паблишер, 2001. – 768 с.

### **Сведения об авторах**

Ю.В. Кондратенко, аспирант Красноярского государственного торгово-экономического института, г. Красноярск, [yurikon03@yandex.ru](mailto:yurikon03@yandex.ru)

В.Г. Подопригора, доктор физико-математических наук, профессор Красноярского государственного торгово-экономического института, г. Красноярск, [vgp@kgtei.kts.ru](mailto:vgp@kgtei.kts.ru)